2005年度夏学期
記号論理学1

金子洋之

2005年7月21日

1．次のうち、トートロジーには○、そうでないものには×を解答欄に記入しなさい。

(a) $(\neg A \vee (B \to A)) \to (\neg A \wedge B)$

(b) $(\neg A \wedge B) \to (A \vee B)$

(c) $((B \to (A \vee (B \to A))) \vee \neg(A \to B)) \to A$

(d) $(\neg A \wedge (A \vee B)) \to \neg B$

(e) $(A \to B) \vee (B \to A)$

2．次の証明の空欄に入る適切な語記号 (式) 数字を解答欄に記入しなさい。

$$\forall\, x(Sx \to ((\neg\, Bx \wedge \neg\, Cx) \to Kx)) \;\vdash \forall\, x((Sx \wedge \neg\, Kx) \to (Bx \vee Cx))$$

1	(1)	$\forall x(Sx \to ((\neg Bx \wedge \neg Cx) \to Kx))$	Ass.
2	(2)	$Sx \wedge Kx$	H.
2	(3)	1	2,$\wedge$ -E
1	(4)	$Sx \to ((\neg Bx \wedge \neg Cx) \to Kx)$	1,$\forall$ -E
1,2	(5)	$(\neg Bx \wedge \neg Cx) \to Kx$	3,4,$\to$ -E
2	(6)	$\neg Kx$	2,$\wedge$-E
7	(7)	$\neg Bx \wedge \neg Cx$	H.
2	(8)	Kx	5,7,$\to$-E
1,2,7	(9)	$\perp$	3
1,2	(10)	4	7-9,$\neg$ -I
11	(11)	$\neg(Bx \vee Cx)$	H.
12	(12)	$\neg Bx$	H.
13	(13)	$\neg Cx$	5
12,13	(14)	$\neg Bx \wedge \neg Cx$	12,13,$\wedge$ -I
1,2,12,13	(15)	$\perp$	6
1,2,12	(16)	$\neg\neg Cx$	13-15,$\neg$ -I
1,2,12	(17)	7	16,$\neg\neg$ -E
1,2,12	(18)	$Bx \vee Cx$	17,$\vee$ -I
8	(19)	$\perp$	11,18,$\neg$ -E
1,2,11	(20)	$\neg\neg Bx$	12-19,$\neg$ -I
1,2,11	(21)	Bx	20,$\neg\neg$ -E
1,2,11	(22)	$Bx \vee Cx$	21,$\vee$ -I
1,2,11	(23)	$\perp$	11,22,$\neg$ -E
1,2	(24)	$\neg\neg(Bx \vee Cx)$	9
1,2	(25)	$Bx \vee Cx$	24,$\neg\neg$ -E
1	(26)	10	2-25,$\to$ -I
1	(27)	$\forall x((Sx \wedge \neg Kx) \to (Bx \vee Cx))$	26,$\forall$ -I

3．以下は、$\forall x(Qx \to Px) \vdash \forall x \forall y((Px \wedge Rxy) \to (Qx \wedge Rxy))$ を示すための意味論的論証である。空欄 A〜G に入る適切な語記号数字を解答欄に記入しなさい。

いま、$v_A(\forall x(Qx \to Px)) = T$—(1) となるような、任意のモデル A における任意の付値関数 v_A を考える。[A] の仮定として、この付値関数のもとで $v_A([B]) = F$ とする。$\forall$ に関する付値関数の定義により、ある $d \in D$ について $v_A(\forall y((Pd \wedge Rdy) \to (Qd \wedge Rdy))) = F$ でなければならない (D はモデル A のドメインとする)。ふたたび $\forall$ に関する付値関数の定義により、ある [C] について、$v_A((Pd \wedge Rde) \wedge (Qd \wedge Rde))) = F$ でなければならない。これより、D に関する付値関数の定義に基づいて、$v_A(Pd \wedge Rde) = T$ かつ $v_A(Qd \wedge Rde) = F$ が帰結する。このとき、前者から [E]—(2) かつ $v_A(Rde) = T$—(3)、後者から $v_A(Qd) = F$ か、または $v_A(Rde) = F$ でなければならない。このとき、(3) が成立している以上、$v_A(Rde) = F$ ではありえない。したがって、$v_A(Qd) = F$ でなくてはならない。しかし、(1) から $v_A(Qd \to Pd) = T$ が成立しており、これと (2) とより、$v_A(Qd) = T$ でなくてはならないが、これは矛盾である。したがって、F が T であるのに、G が F となるようなモデルは存在しない。よって、上の推論の妥当性が示された。

4．次のものを自然演繹体系において証明しなさい。

(a) $\vdash (A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$

(b) $\vdash (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$

(c) $\vdash \neg\exists x Fx \to \forall x \neg Fx$

(d) $\exists x(\neg Fx \to \exists y \neg Fy) \vdash \neg\forall z Fz$

(e) $\forall x \forall y \forall z((S(x,y) \wedge S(y,z)) \to S(x,z)), \forall x \neg S(x,x) \vdash \forall x \forall y\ (S(x,y) \to \neg S(y,x))$