2004年度夏学期
物理学（力学）

小宮山進

2004年9月

所要時間　90分
注意）ノーと及び配布問題・回答プリント：持込可　　参考書：持ち込み不可

1．次の数を複素指数関数で表せ。

(1) $-ie^2$

(2) $(\sqrt{3/2}+i/2)e$

2．バネ定数 c のばねに質量 m の重りがぶら下がっている。重りに対して垂直方向に $F\cos(\omega t)$ の外力を加える。重りの運動に対してその速度に比例して空気抵抗——垂直方向の変位を x、k を正の定数として 摩擦力 $= -mk\frac{dx}{dt}$——が働くとして以下の問いに答えよ。

(1) 運動方程式を書き下せ。

(2) 外力がゼロ（$F=0$）の時の一般解を求めよ。

(3) 外力が存在する（$F\neq 0$）時の一般解を求めよ。

(4) 上記設問 (3) の答えをもとに、摩擦力が十分小さい（$k \ll 2(c/m)^{1/2}$）として近似的に考えよう。外力の大きさ F を一定として角周波数 ω を変化させるとき、振動の振幅は共鳴的に変化しかつ振動の位相も外力に対して変化する。　振幅と (外力に対する) 位相差を ω の関数として図示せよ。その際、
(a) 共鳴周波数、(b) 共鳴周波数での振幅、(c) 共鳴の半値全幅、(d) 位相差の共鳴数波数での値、
を明示せよ。

3．授業の初回に図のような２重振り子の運動を観察した。その際、振幅が小さい場合には単なる単振動の重ね合わせのように見えた。以下の手順に従い、ラグランジェ方程式を使ってこの運動を解析しよう。
２重振り子は、それぞれ長さ l、質量 M の２本の一様な棒からできている。
図のように、上と下の棒の傾きをそれぞれ θ_1、θ_2 とすれば、系の運動は θ_1 と θ_2 の二つの一般化座標（およびその時間微分）だけで完全に記述できるはずである。

系のラグランジェ関数を求めるために全運動エネルギー K をまず考えよう。全運動エネルギーは上の棒と下の棒が持つ運動エネルギーの和である。

(1) 上の棒の運動エネルギーを θ_1 を用いて書き下せ。ただし上の棒の原点 O のまわりの慣性モーメントが $I_0=(1/3)Ml^2$ であることを思い出せば簡単である。

(2) 下の棒の運動エネルギーを θ_1 と θ_2 を使って書き下せ。ただし、剛体の運動エネルギーは、「重心の並進運動エネルギー」と「重心周りの回転運動エネルギー」の和であること、また、下の棒の棒の重心周りの慣性モーメントが $I_G=(1/12)Ml^2$ であることを思い出せば簡単である。

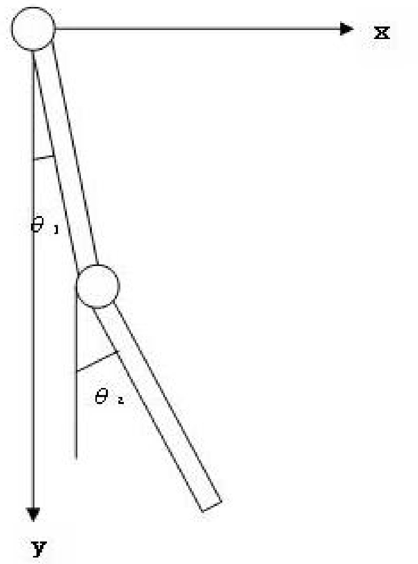

図 1: ２重振り子

これで系の全運動エネルギー K が解った。次に系の位置エネルギー U を考える。U も上の棒と下の棒がそれぞれ持つ位置エネルギーの和である。

(3) 上の棒の位置エネルギーを θ_1 を用いて書き下せ。

(4) 下の棒の位置エネルギーを θ_1 と θ_2 を用いて書き下せ。

これで準備が整った。

(5) 系のラグランジェ関数を書き下し θ_1 と θ_2 に対してそれぞれラグランジェ方程式（二つ）を求めよ。

(6) 上問 (5) において θ_1 と θ_2 がともに小さいとし、それぞれの式を小振幅に対する近似的式に直せ。

上問 (6) で求めた方程式はそれぞれが変数 θ_1 と θ_2 を含んでいるので連立微分方程式を解かなければならない。このような振動を「連成振動」と言ううが、授業ではやらなかった。しかし心配無用。以下のようにすれば簡単に解ける。「θ_1 と θ_2 がともに角速度 ω で単振動するのではないか」と予測して (6) で求めた方程式にだまされたと思って $\theta_1 = Ae^{i\omega t}$、$\theta_2 = Be^{i\omega t}$ を代入してみよ。(A, B は複素数であり、本当の物理的解は θ_1、θ_2 の実部である。）得られる連立方程式を満たす ω, A, B が見つかればそれが正しい解である。

(7) まず A と B のみを変数だと考えてこの連立方程式を解いて A と B を求めてみよ。(ω が特別な値をとらない限り $A = 0$、$B = 0$ という無意味な解しか存在しないことに気づくはずである。）

(8) $A = 0$、$B = 0$ という無意味な解以外の解が存在するための ω の値を求めよ。可能な ω が二つ見つかるはずである。つまり代入した形の解が存在するのである。

(9) それぞれの ω に対して A と B を求め、どのような運動かを絵に描いて説明せよ。（ともに単振動の組み合わせである。）

このように、小振幅の場合はラグランジェ方程式を解析的に解いて運動を求めることができた。ただし、大振幅の場合は (6) における近似が使えず、(5) の方程式をまともにとかなければならない。(5) の方程式は解析的には解けず、数値的に解くしかないが、そうすると授業初回に観察したカオスが出てくるのである。

４．感想があれば記せ