2004年度冬学期
物理と数学

伊藤教員

2005年1月24日

1．長さLの弦の両端を固定し、弦の振動を考える．この弦の線密度（単位長さあたりの質量）はσで，張力Tが加えられている．図に示すような（変注：図は省略）座標系を取り，振動による変位は，常に紙面内（$x-y$平面とする）にあるとする．この弦にはy方向に単位長さあたり$f(t,x)$で表される外力が働く（$f(t,0)=f(t,L)=0$を満たす）．以下の問いに答えよ．

(1) 弦を質点（質量$m=\sigma a$）と質量のない糸（長さa）の組み合わせによるモデルで離散化する．n番目の質点の位置は$x=na$で与えられるとして，その変位$\xi_n(t)$の運動方程式を書き表せ．ただし，$|\xi_n(t)-\xi_{n\pm 1}(t)|\ll a$とする．
ヒント：外力$f(t,x)$は単位長さあたりの力であることに注意する．

(2) 連続体の極限（$a\to 0$）を行い，変位$\xi(t,x)$の満たすべき方程式を求めよ．

(3) この振動はフーリエサイン級数

$$\xi(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\sin k_n x$$

で表すことができる．k_nを求めよ．

(4) $\alpha_n(t)$の満たすべき方程式を求めよ．

(5) $f(t,x)=Ax(L-x)\cos\omega t$のとき，$\alpha_n(t)$を求めよ．ただし，$A=0$のとき，$\alpha_n(t)=0$となる条件を満たすものとする．
必要ならば以下の公式を用いてよい．

$$\int x\sin x dx=-x\cos x+\sin x,\ \int x^2\sin x dx=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)$$

2．ガウスの定理を用いてベクトル公式$\triangle(1/r)=-4\pi\sigma(r)$を証明せよ．ただし$\triangle$はラプラシアンを表す．

3．無限に広い 2 枚の金属板が距離 $2d$ だけ離れて（$x=-d, x=d$）に平行に置かれ，どちらも接地されている．まず，この系の電位に関するグリーン関数 $G(x,x')$ を求めよ．次に，この金属板間の中央のみに電荷が（1 次元的に）厚さ $2D<2d$ で分布し（$-D\le x\le D$），それ以外ではゼロとする．任意の電荷密度 $\rho(x)$ に対して，空間の電位分布 $\phi(x)$ をグリーン関数を用いて表現せよ．また $\rho(x)=\rho_0$（一定）とするとき，空間の電位分布を実際に求めよ．