2004年度夏学期
記号論理学1

金子洋之

2004年7月22日

1．次のうち、トートロジーには○、そうでないものには×を解答欄に記入しなさい。

(a) $(A \to B) \vee (B \to A)$

(b) $\neg[(A \vee (B \to C)) \leftrightarrow B]$

(c) $(A \to C) \to [\neg(B \to C) \to ((A \to C) \wedge C)]$

(d) $((A \vee B) \to C) \leftrightarrow ((A \to C) \wedge (B \to C))$

(e) $\neg[(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \to B)$

2．次の証明の空欄に入る適切な語記号 (式) 数字を解答欄に記入しなさい。

$$\forall x \exists y \exists z Lyxz \vdash \forall z(\neg Fz \to \forall y \neg Lyaz) \to \exists y \exists z(Fz \wedge Lyaz)$$

1	(1)	$\forall x \exists y \exists z Lyxz$	Ass.
2	(2)	$\forall z(\neg Fz \to \forall y \neg Lyaz)$	H.
1	(3)	$\exists y \exists z Lyaz$	1,∀ -E
4	(4)	$\exists z Lyaz$	H.
１	(5)	$Lyaz$	２
３	(6)	$\neg Fz$	４
2	(7)	$\neg Fz \to \forall y \neg Lyaz$	2,∀ - E
2,6	(8)	$\forall y \neg Lyaz$	7,6,→-E
2,6	(9)	$\neg Lyaz$	8,∀ -E
2,5,6	(10)	$\perp$	5,9,¬ -E
５	(11)	$\neg\neg Fz$	6-10,¬ -I
2,5	(12)	Fz	11,¬¬-E
2,5	(13)	６	5,12,∧ -I
2,5	(14)	$\exists z(Fz \wedge Lyaz)$	13 ∃ -I
2,5	(15)	$\exists y \exists z(Fz \wedge Lyaz)$	７
2,5	(16)	８	4,5-15,∃ -E
1,2	(17)	$\exists y \exists z(Fz \wedge Lyaz)$	９
1	(18)	１０	2-17,→ -I

3．以下は、$\forall x(Qx \to Px) \vdash \forall x \forall y((Px \wedge Rxy) \to (Qx \wedge Rxy))$ を示すための意味論的論証である。空欄 A〜G に入る適切な語記号数字を解答欄に記入しなさい。

いま、$v_A(\forall x(Qx \to Px)) = T$—(1) となるような、任意のモデル A における任意の付値関数 v_A を考える。[A] の仮定として、この付値関数のもとで $v_A([B]) = F$ とする。$\forall$ に関する付値関数の定義により、ある $d \in D$ について $v_A(\forall y((Pd \wedge Rdy) \to (Qd \wedge Rdy))) = F$ でなければならない (D はモデル A のドメインとする)。ふたたび $\forall$ に関する付値関数の定義により、ある [C] について、$v_A((Pd \wedge Rde) \wedge (Qd \wedge Rde))) = F$ でなければならない。これより、D に関する付値関数の定義に基づいて、$v_A(Pd \wedge Rde) = T$ かつ $v_A(Qd \wedge Rde) = F$ が帰結する。このとき、前者から [E]—(2) かつ $v_A(Rde) = T$—(3)、後者から $v_A(Qd) = F$ か、または $v_A(Rde) = F$ でなければならない。このとき、(3) が成立している以上、$v_A(Rde) = F$ ではありえない。したがって、$v_A(Qd) = F$ でなくてはならない。しかし、(1) から $v_A(Qd \to Pd) = T$ が成立しており、これと (2) とより、$v_A(Qd) = T$ でなくてはならないが、これは矛盾である。よって、上の推論の妥当性が示された。

4．次は、形式的なペアノ算術における、$\forall x \forall y(S(x) + y = S(x + y))$ の証明である。空欄にあてはまる適切な式・記号・数字を解答欄に記入しなさい。（ただし、以下において (A3):$x + 0 = x$,(A4):$x + S(y) = S(x + y)$ とする。）

	(1)	$S(x) + 0 = S(x)$	A3 の代入事例
	(2)	$x + 0 = x$	A3
	(3)	1	=-I
	(4)	$S(x + 0) = S(x)$	2,3,=-E
	(5)	$S(x) + 0 = S(x + 0)$	1,4,=-E
6	(6)	$S(x) + y = S(x + y)$	H
	(7)	$S(x) + S(y) = S(S(x) + y)$	A4 の代入事例
	(8)	$S(S(x) + y) = S(S(x) + y)$	=-I
6	(9)	$S(S(x) + y) = S(S(x + y)$	6,8, 2
3	(10)	$S(x) + S(y) = S(S(x + y))$	7,9,=-E
	(11)	$x + S(y) = S(x + y)$	A4
	(12)	$S(x + S(y))S(x + S(y))$	=-I
6	(13)	$S(x + S(y)) = S(S(x + y))$	10,11,=-E
6	(14)	$S(x) + S(y) = S(x + S(y))$	11,13,=-E
	(15)	$(S(x) + yS(x + y)) = S(x + y)) \to (S(x) + S(y) = S(x + S(y)))$	4
	(16)	5	5,15,Ind
	(17)	$\forall x \forall y(S(x) + y = S(x + y))$	16,$\forall$ -I

5．次のものを自然演繹体系において証明しなさい。

(a) $\vdash (A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$

(b) $\vdash (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$（ヒント：最初に仮定 $(A \to B)$ から $\neg\neg A$ と $\neg B$ の導出を構成せよ。）

(c) $\vdash \neg\exists x Fx \to \forall x \neg Fx$

(d) $\exists x(\neg Fx \to \exists y \neg Fy) \vdash \neg\forall z Fz$